RECENSIONI E PREFAZIONI

Bottazzini, U. (2019). *Istanti fatali*. Bari-Roma: Laterza.

Recensione di Bruno D'Amore

Quegli istanti "fatali" che appaiono nel titolo di questa opera di Umberto Bottazzini sono quei momenti temporali che hanno decretato svolte eccezionali, nel nostro caso creazioni o scoperte matematiche di livello straordinario, che hanno segnato svolte impensabili nel dominio della matematica. Si tratta dunque di una narrazione sotto forma di racconto dotto e piacevolissimo di alcune fra le più spettacolari creazioni e invenzioni, non solo della matematica ma di tutta la storia dell'essere umano: i numeri naturali e i sistemi per rappresentarli; lo zero; i numeri irrazionali; i tentativi di quadrare il cerchio con riga e compasso; i numeri immaginari; le geometrie non euclidee e considerazioni sull'universo che aderisce a strutture matematiche non euclidee, non tridimensionali e non solo legate ai numeri reali. L'autore ci sorprende con riferimenti continui molto colti tratti dal mondo della letteratura, dell'arte figurativa, della filosofia, aspetti ai quali fa continui rinvii precisi di grande interesse.

Riesce poi a far capire in maniera precisissima, documentata e colta, le vere rivoluzioni che si nascondono dietro aspetti della matematica dai più considerati banali o marginali.

Per esempio, l'idea geniale (che ha richiesto molte decine di migliaia di anni all'essere umano) di capire che "due pelli" e "due banane", pur nell'ovvia totale differenza della qualità degli oggetti considerati, hanno qualcosa di notevole in comune, e cioè quel "due"; quel due, che parrebbe riferirsi alla cosità e che invece è da essa avulso. Non ci si pensa, in genere, perché l'aritmetica sembra così connessa all'idea naturale di quantità che sembra data per scontata, di immediata comprensione ed elaborazione umana.

Lo stesso dicasi per le relazioni fra figure geometriche elementari, come il processo di trasformazione mediante passaggi elementari (eseguiti con riga e compasso) da un cerchio a un quadrato equiesteso, facendo opportune scomposizioni. Dato che ciò riesce sempre fra qualsiasi poligono e un quadrato, perché non dovrebbe essere possibile fra cerchio e quadrato? Che relazioni umane si sono sviluppate nell'affrontare questo tipo argomenti?

Credo che qualunque persona di cultura, matematico (e ancor più non matematico), possa trovare immenso piacere nel leggere questo libro; e penso che qualunque insegnante di matematica possa trovare materiale di studio e di interesse per i propri studenti. Il potenziale lettore ideale di questo libro, piacevole e dotto, è la persona curiosa, attratta dal desiderio di conoscere o almeno riflettere sulla storia della nostra disciplina, storia legata però all'essere umano che l'ha creata nei millenni, con incredibile vitalità, genialità e sforzo. Di grande aiuto in questa impresa sarà la piacevolezza della narrazione, fatto non sempre consueto in opere di questo tipo.

Freguglia, P., & Giaquinta, M. (2020). *Intorno all'idea matematica di curva: Una introduzione storica*. Bologna: Pitagora.

Recensione di Bruno D'Amore

Comincio con un compito facile, presentando brevemente i due autori.

Paolo Freguglia è noto al pubblico degli appassionati di storia della matematica per le tante sue opere, soprattutto di ricerca ma anche di divulgazione. Ordinario di storia della matematica a L'Aquila, notissimo all'estero per i periodi come visiting in vari Paesi europei e USA, direttore di importanti riviste specialistiche, membro di Accademie prestigiose, attualmente Presidente della Società Italiana di Storia della Matematica. Ma attivo anche come matematico applicato e come biomatematico. In fisica ha pubblicato studi sul moto betatronico, creando modelli ottico-geometrici di simulazione. In quanto storico, ricordo i suoi molti studi specialistici e i 13 libri pubblicati con i maggiori editori; in particolare segnalo gli studi sulle opere di François Viète e degli allievi della sua scuola, quelli sugli sviluppi di algebra e geometria del XVI e XVII secolo, la profonda analisi degli sviluppi del calcolo geometrico e i fondamenti di geometria della scuola di Peano. Mi piace anche far cenno al suo interesse personale verso i problemi che hanno a che fare con l'insegnamento e l'apprendimento della matematica, tanto da esser stato membro della CIIM.

Mariano Giaquinta è un analista ben noto fra i matematici, docente (ora emerito) dal 1999 presso la Scuola Normale Superiore di Pisa. Ricordo che i suoi campi di ricerca sono soprattutto il calcolo delle variazioni e le equazioni alle derivate parziali; anche se più recentemente ha pubblicato lavori prestigiosi sull'applicazione di metodi di teoria della misura. Negli ultimi decenni, però, ha coltivato con indubbio successo studi sulla storia dello sviluppo delle idee, rapporto fra storia, matematica e filosofia e sul ruolo che la matematica ha avuto nella storia e nello sviluppo della cultura, in particolare il calcolo e la meccanica nel XVIII secolo; molto profonde sono le analisi di problemi di applicazione della matematica allo sviluppo sociologico. Come visiting professor ha avuto periodi di docenza in vari Paesi soprattutto in Europa e Asia. Ha avuto cariche di rilievo presso varie riviste prestigiose e, come direttore del "Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi", ha ricevuto diversi premi non solo nazionali, ma anche internazionali, per esempio da parte dell'Accademia dei Licei e della fondazione von Humboldt. È membro di varie e prestigiose Accademie e appare nel famoso elenco dei ricercatori più citati al mondo, compilato dall'Institute for Scientific Information di Philadelfia, ISI. Ha pubblicato un centinaio di lavori concernenti le sue ricerche e 16 monografie scientifiche con le maggiori case editrici del mondo; ma è autore anche di pregevoli volumi di diffusione, per esempio sulla matematica di base presso Pitagora di Bologna.

E passo al compito difficile: presentare brevemente questa storia coinvolgente e appassionante.

Intanto plaudo alla geniale idea di presentare un apposito studio storico sull'evoluzione di uno degli oggetti matematici più conosciuti, ma proprio per questo a volte dato per scontato, le curve. Ovviamente non si può che iniziare dalle origini, le curve presso i Greci, dunque con metodi esclusivamente sintetici, ricordando che questo fu uno dei temi che appassionò di più i matematici delle origini, non solo con problemi di descrizione, ma anche di misurazione. Ovviamente non si può non nominare Eudosso a questo proposito; né non citare i cosiddetti problemi classici dell'Ellade e gli studi di concoide e cissoide, come i nostri Autori fanno con estrema brevità, ma perfetta precisione storica e geometrica. Ovviamente si passa al metodo di Archimede e, fra i tanti problemi proposti, lo studio della sua spirale. Si giunge al gigante Apollonio, i suoi profondi studi sulle coniche e altri meno noti. Sappiamo bene che i Greci amavano applicare in astronomia questi studi geometrici e a questo tema è dedicata una bella e appassionante decina di pagine. Si giunge poi al metodo analitico, dunque le curve viste grazie alle geniali analisi realizzate da Descartes e Fermat, passando per la geometria proiettiva, la descrizione delle curve mediante equazioni, l'analisi delle curve algebriche, la discussione del problema delle tangenti, i famosi metodi di Fermat, la questione delle quadrature e delle rettificazioni, a proposito delle quali fa capolino il metodo degli indivisibili di Cavalieri. Si giunge al Calcolo, con Leibniz e Newton, grazie ai quali lo studio delle curve assume dimensioni diverse, profondamente tecniche e diventa finalmente chiaro; ed Eulero, che studia il moto dei corpi, servendosi appunto degli strumenti del neonato Calcolo. È in quel periodo che si perviene all'idea di equazioni differenziali, giungendo a idee come le funzioni esponenziali, logaritmiche, funzioni circolari, moto armonico e alla nascita non solo di nuove curve, ma di una nuova idea di curva. Nascono per esempio le curve differenziabili, il cui studio comporta strumenti del tutto nuovi in geometria. Qui mi piace sottolineare il potente contributo di Euler (*Methodus inveniendi*) che permette di risolvere problemi restati in sospeso, ma anche di introdurre nuove nozioni. E, poco dopo, l'intervento di Lagrange che conosciamo come metodo delle variazioni, che porta al δ-calcolo. Un altro aspetto da considerare sono le applicazioni dell'analisi all'astronomia da parte di Newton che conduce a considerazioni che stanno alla base di successive conquiste, tra le quali vengono proposti il principio di Huygens e vari risultati ad esso relativi, fino alla definizione delle curve isocrona e tautocrona. Molto dotto e convincente il passaggio alle curve continue, grazie agli studi sui numeri reali di Weierstrass, Méray, Heine, Cantor e Dedekind. In questo capitolo, degni di lettura attenta i paragrafi dedicati ai numeri, agli insiemi, ai paradossi logici, ben noti, ma qui trattati con grande agilità e profondità. Atteso dal lettore, finalmente si presenta un paragrafo corto ma incisivo sulle curve continue, le cosiddette curve di Jordan, la nuova rivoluzionaria idea di dimensione. Un capitolo intero è dedicato a quel magnifico periodo del XIX secolo nel quale ci fu uno sviluppo straordinario degli studi anche generali e critici sulla geometria, dunque anche sui suoi fondamenti, sulla geometria delle trasformazioni, sulla geometria algebrica e quella differenziale (che, onestamente, mi hanno sempre personalmente appassionato oltre ogni dire). E la rivoluzione che ha portato a una nuova concezione proprio di quelle curve dalle quali tutto ciò era nato, 2300 anni prima, le coniche, e a una revisione critica totale delle curve algebriche.

Credo che qualsiasi persona amante o anche solo curiosa dell'avventura scientifica della matematica, che non si accontenti delle solite cose, dei soliti discorsi, ma voglia davvero saperne di più, non solo sul contenuto, ma anche sulla sua evoluzione storica, avrà un profondo beneficio culturale dalla lettura di questo libro. Penso agli insegnanti di scuola secondaria di II grado e di università; ma penso anche che alcuni di questi capitoli potrebbero essere adatti a letture comuni in aula, docente e allievi all'unisono, come discussione e approfondimento; ne nascerebbe una bella azione didattica, viva, interessante, profonda. Anche perché so per certo che questo, dell'azione didattica, è uno degli obiettivi di base sui quali si è costruita questa splendida storia di uno degli argomenti più spesso dati per scontati, le curve in geometria.

D'Amore, B. (2020). *La matematica nell'opera di Dante Alighieri. Spunti biografici a scopo didattico*. Bologna: Pitagora.

Recensione di Giovanni Giuseppe Nicosia

Sono ormai molti anni che Bruno D'Amore ha cominciato a farci scoprire la matematica nel nostro maggior poema nazionale, mostrando come essa abbondi nelle sue terzine e quanto sia necessaria una certa conoscenza o forse meglio una educata sensibilità scientifica per apprezzarlo compiutamente. I suoi scritti, ricchi di ritrovamenti matematici tra versi e immagini, hanno permesso di infrangere, una volta di più, quella barriera artificiosa che nella cultura italiana separa le scienze dalle arti umanistiche. Essa non c'era ai tempi di Dante e non ha più ragion d'essere nemmeno ai nostri.

Selezionando, interpretando e contestualizzando storicamente le parole del Poeta, l'autore ha evidenziato, in una lunga teoria di saggi, come numeri, oggetti geometrici, inferenze e persino probabilità, seppure in forme assai diverse dalle nostre, costituiscano riferimenti continui per la cultura medievale e per Dante in particolare.

Ma in questo libro si fa qualcosa di diverso. Questa è una raccolta di storie inventate su Dante e la matematica, sul loro rapporto. Per meglio dire sono le trame a essere inventate: le ricostruzioni del contesto storico sono accuratissime, le atmosfere e i discorsi plausibilissimi, i ragionamenti ineccepibilmente tipici della mentalità dell'epoca, ma le vicende narrate non sono tratte da riferimenti documentali precisi. Il Dante che si muove e ragiona in queste pagine è dunque personaggio in parte ricostruito e in parte fittizio, protagonista di apologhi simili a quei miti "egizi" che secondo Fedro, nell'omonimo dialogo platonico, Socrate costruisce con estrema facilità.[1]

E perché costruire storie su Dante e la matematica? La ragione è in quello spirito didattico che informa platonicamente tutta l'opera dell'autore, che ha dedicato alla didattica della matematica la maggior parte dei suoi sforzi e che ha sempre colto ogni occasione per umanizzare, caratterizzare, rendere accessibili alle menti di tutti anche le cose più complicate. Da matematico, da didatta, da critico d'arte e in molti altri ruoli Bruno D'Amore ha più volte ribadito l'importanza di un uso didattico della storia delle discipline, della ricostruzione dei contesti generativi e delle loro motivazioni, perfino dell'uso dell'aneddoto, vero o ben trovato che sia, per dare carne e sangue agli oggetti di studio.

Dopo aver lavorato in questo senso sulla matematica, della cui storia è un fervente cultore e un abilissimo divulgatore (sono recenti i 4 volumi di una storia della matematica scritta con Silvia Sbaragli), ha nuovamente rivolto la sua attenzione all'opera di Dante, la quale sconta nella cultura scolastica italiana un eccesso di istituzionalizzazione che la distanzia, insieme alle difficoltà linguistiche e alla diversità di riferimenti, dalla realtà degli allievi. Un Dante "mostro sacro" di cui a scuola si venera un'immagine lontana rischia di non parlare più a nessuno, di incutere timore. Pur con delicatissima reverenza, D'Amore rende Dante un personaggio umanissimo, che va in osteria, apprezza le donne, ha sonno, prova appetiti e passioni simili alle nostre. Dopo l'identificazione, si fanno un po' più vicini i ragionamenti che l'autore ha ricostruito sulle origini di quei brani del testo dantesco che sono più ricchi di matematica.

C'è molto dell'autore in questo Dante che, in un capitolo ricco di affettuosa tenerezza, ricerca testimonianze di Fibonacci o che si scalda a un falò ragionando sul numero degli angeli. E c'è senza dubbio molto coinvolgimento personale, che spinge in alcuni passi all'autobiografia, come ad esempio nella descrizione della postura di Ovidio pensante nella statua di Sulmona. C'è il richiamo emotivo all'esperienza diretta del lettore, cui l'autore si rivolge direttamente in qualche passo metaletterario ("Come dici, lettore? Sì, sì, allora la tabellina s'imparava a memoria anche fino a venti per venti e talvolta di più").

[1] Φαῖδρος: ὦ Σώκρατες, ῥᾳδίως σὺ Αἰγυπτίους καὶ ὁποδαποὺς ἂν ἐθέλῃς λόγους ποιεῖς.
Fedro: O Socrate, crei con grande facilità racconti egizi o di qualunque paese tu voglia.
Platone. *Fedro*.

E c'è quindi un po' anche di ogni matematico o di ogni lettore curioso che voglia accostarsi alla *Comedìa* (*Divina Commedia*) per capirla appieno.

Fandiño Pinilla, M. I. (2020). *Diversi aspetti che definiscono l'apprendimento e la valutazione in matematica*. (Prefazione di Giorgio Bolondi). Bologna: Pitagora.

Recensione di George Santi

Che cos'è un oggetto matematico? Che cosa significa pensare in matematica? Che cosa significa apprendere la matematica? Che cos'è la matematica? Queste sono alcune delle grandi domande, potremmo chiamarle meta-domande, che guidano la ricerca in didattica della matematica soprattutto nella sua accezione moderna, scientifica, la cui nascita può essere collocata indicativamente alla fine degli anni '70 con l'emersione della nozione di *contratto didattico* introdotta da Guy Brousseau.

Un tratto caratteristico dell'approccio moderno alla didattica della matematica è la complessità. Infatti, entrare nella profondità del Sapere e della cognizione in matematica richiede una prospettiva sistemico-relazionale capace di intersecare discipline diverse – matematica, epistemologia, psicologia e semiotica per citarne alcune – ma anche teorie diverse e metodologie di ricerca diverse.

L'autrice accompagna il lettore con semplicità, chiarezza e concretezza nell'affascinante complessità che caratterizza la didattica della matematica, affrontando il tema sempre attuale e scottante della valutazione. La valutazione, ineliminabile dalla pratica d'aula, è un fenomeno tipicamente complesso nel quale si intersecano diversi aspetti legati all'insegnamento della matematica – cognitivi, pedagogici, psicologici, affettivo-relazionali. Più in generale, la capacità di valutare è intrinseca alla razionalità che caratterizza l'essere umano.

Troppo spesso, però, a scuola l'atteggiamento nei confronti della valutazione è lineare, all'interno di un sistema didattico che a grandi linee segue il seguente schema: l'insegnante insegna, l'allievo studia e, attraverso la valutazione, l'insegnante accerta il livello di apprendimento dell'allievo su una scala quantitativa attraverso il voto. A questo punto il ciclo ricomincia con l'insegnamento di un nuovo argomento e allo studente con valutazione insufficiente è demandato il recupero delle lacune che nella terminologia istituzionale viene indicato come debito formativo. Una terminologia che rispecchia l'idea dominante di individuo e di Sapere in molti sistemi educativi. Parafrasando le parole di Luis Radford, si tratta di una visione consumistica dell'educazione nella quale il Sapere è considerato un bene di scambio che viene trasferito da un individuo (l'insegnante) a un altro individuo (l'allievo).

I limiti di questa posizione di fronte alla valutazione è ben testimoniata dal pedagogista britannico Ken Robinson, il quale nel suo libro *The Element* riporta una serie di casi di studenti espulsi dal sistema educativo istituzionale perché considerati inadeguati, che tuttavia sono riusciti, seguendo altri percorsi, a realizzare il loro progetto di vita ai massimi livelli nel loro ambito di interesse. Nella mia lunga esperienza di insegnante mi è capitato più volte di vedere autentici talenti giudicati come non adatti alla matematica perché non avevano "capacità logiche", per poi scoprire che si trattava, per esempio, di ottimi programmatori in grado di assemblare il proprio PC, di guidarti a distanza per risolvere un problema hardware o software al tuo computer e tanto altro. Competenze che richiedono "capacità logiche" articolate, profonde, divergenti, quelle tipiche del pensiero matematico.

Non è mia intenzione criticare il lavoro prezioso e difficile degli insegnanti, ma quanto esposto sopra vuole essere lo spunto per avviare un'analisi scientifica e culturale della valutazione e più in generale dei processi di insegnamento e apprendimento della matematica. Il testo offre una riflessione critica sulla valutazione, accompagnata da suggerimenti concreti, esempi e linee guida che possono essere implementati direttamente nell'aula di matematica.

Il testo propone un'analisi sistemica della valutazione, capace di includere la sua complessità, la sua ricchezza e le sue potenzialità educative e didattiche. La valutazione non è un momento specifico del processo educativo che ha come protagonista uno specifico soggetto, l'allievo. La valutazione è un processo continuo che coinvolge certamente l'allievo, ma con esso vede interconnessi anche il curricolo, la trasposizione didattica, l'ingegneria didattica, l'ambiente classe, le credenze e gli atteggiamenti sulla matematica e sul suo insegnamento-apprendimento, la disposizione emotiva dell'alunno di fronte all'apprendimento che include la motivazione, la volizione e il senso di autoefficacia. Non mi addentro nella descrizione di questi aspetti e su come interagiscono tra di loro, per non privare il lettore dell'argomentazione avvincente e appassionante che egli può trovare nel testo. Questa concezione della valutazione è consistente con la nozione di *joint labour* (lavoro congiunto) introdotta nel 2016 da Radford, secondo la quale insegnante e allievi hanno un legittimo interesse l'uno nell'altro e nella loro impresa comune di realizzare l'apprendimento della matematica e sono individui che sognano, apprendono, soffrono e sperano insieme.

La scuola, come istituzione educativa realizza il suo obiettivo quando gli studenti raggiungono, per quello che ci interessa in questo ambito, l'apprendimento della matematica. La nozione complessa e dinamica della valutazione proposta dal testo sarebbe incompleta e in ultimo anche inefficace se non si addentrasse nella complessità e dinamicità dell'apprendimento della matematica. Non sapremmo che cosa stiamo valutando, perché lo stiamo valutando e come interpretare il risultato della valutazione per incidere sugli aspetti, citati sopra, coinvolti in questo processo.

Pur nella sua unitarietà, l'autrice evidenzia che l'apprendimento matematico ha molteplici aspetti. Nello specifico ne ha individuati cinque: l'apprendimento concettuale, l'apprendimento algoritmico, l'apprendimento strategico, l'apprendimento comunicativo e l'apprendimento semiotico. Il lettore è accompagnato con maestria in un viaggio filosofico, epistemologico, storico-culturale e semiotico nella matematica che gli mostra l'interazione dialettica dei cinque apprendimenti nell'incontro con un oggetto culturale unitario.

Quando l'insegnante ottiene una valutazione negativa di un suo alunno, ma anche una positiva, che cosa ha valutato? Che cosa significa affermare che uno studente è "bravo" o "incapace" in matematica? Lo stesso errore di più studenti ha necessariamente la stessa origine? Come posso intervenire, per aiutare lo studente, negli aspetti legati al curriculo, alla trasposizione didattica, all'ingegneria didattica ecc.? Lo studente che consideriamo senza "capacità logiche", non adatto alla matematica, potrebbe, come mi è capitato spesso di osservare, avere problemi di disgrafia o discalculia, e ottenere risultati negativi perché debole nell'apprendimento algoritmico, mentre in altri contesti manifesta spiccate competenze a livello concettuale e strategico.

Senza la consapevolezza di questa complessità insita nell'apprendimento della matematica e di conseguenza nella sua valutazione, l'insegnante non può che ridurre la sua valutazione a un numero e lasciare lo studente a sé stesso per affrontare le difficoltà la cui origine più profonda rimane inaccessibile a entrambi.

Diversi aspetti che definiscono l'apprendimento e la valutazione in matematica è un testo che reputo particolarmente importante per il mondo della scuola e della ricerca in didattica della matematica.

Un testo che consiglio ai docenti di matematica, a chi è interessato all'inclusione nella sua accezione più ampia, come differenziazione per *tutti* gli studenti, e a chi è interessato alla storia e all'epistemologia della matematica. Lo consiglio anche ai dirigenti scolastici che hanno la responsabilità di condurre gli scrutini di fine quadrimestre per valorizzare la ricchezza e profondità sia della matematica sia dell'esperienza vissuta dagli allievi a scuola. A partire dalla valutazione sommativa, potrebbero avviare un dialogo con il docente di matematica per individuare cause e modalità di recupero personalizzate senza ridurre il percorso dello studente a un freddo numero che cancellerebbe in un batter d'occhio la complessità e dinamicità dell'apprendimento in matematica.

Vorrei concludere evidenziando che le tesi proposte nel testo sono frutto della pluridecennale ricerca in didattica della matematica, che l'autrice ha reso accessibile con chiarezza e al contempo con rigore scientifico.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2020). *Gli effetti del contratto didattico in aula: Uno strumento concreto per gli insegnanti di Matematica*. (Prefazione e postfazione di Guy Brousseau). Bologna: Pitagora.

Recensione di Maura Iori

Tutti gli insegnanti (non solo di matematica) sanno che una risposta precisa e puntuale, pronunciata da uno studente con assoluta sicurezza e giusta intonazione a una loro domanda lascia spesso trapelare qualcosa di più, di non detto, di sottile o poco personale, legato al desiderio dello studente di fornire non solo una risposta ritenuta sufficientemente corretta dall'insegnante, ma anche quel particolare in più su cui l'insegnante si è soffermato più volte o ha insistito molto, usando in qualche modo o preferibilmente la terminologia usata dall'insegnante o dal libro di testo, come prova dell'attenzione prestata alle sue parole o al libro di testo, della condivisione di termini, discorsi o concetti, dunque (dal punto di vista dello studente) della comprensione dell'argomento in questione.

D'altra parte, le non risposte o risposte laconiche, contorte, incomplete, errate o ambigue pronunciate lentamente da uno studente, in attesa di sguardi complici, sorrisi incoraggianti, suggerimenti, correzioni o completamenti da parte dell'insegnante o di qualche compagno di classe, sono assai frequenti, sotto gli occhi di tutti, insegnanti e studenti.

In tali situazioni l'insegnante può reagire in modi diversi, spesso sulla base di un bagaglio di conoscenze e convinzioni sui processi di insegnamento-apprendimento costruito empiricamente, ovvero sulla base di un'epistemologia spontanea. In particolare può:

- ripetere la domanda in modo identico o con parole diverse;
- evidenziare la presenza di errori o ambiguità nella risposta;
- cercare di ridurre l'incertezza dello studente
  - fornendo ulteriori informazioni di tipo matematico, tecnico o metodologico;
  - suddividendo la domanda iniziale in domande intermedie che orientino lo studente verso la risposta attesa (segmentazione della domanda);
  - usando vari strumenti retorici extra-matematici, come metafore o analogie (il cui abuso è alla base dell'*effetto Dienes* e dell'*effetto Jourdain*);
  - suggerendo espedienti mnemonici o pronunciando le prime sillabe delle parole che costituiscono la risposta attesa (*effetto Topaze*);
- accettare una risposta di poco valore cognitivo, banale o suggerita (*effetto Jourdain*);
- fornire la risposta attesa completa;

- commentare criticamente gli errori o le scarse conoscenze dello studente;
- tacere;
- …
- cambiare domanda.

Alla base di questi e altri comportamenti, come gli studi e le numerose ricerche di Guy Brousseau hanno evidenziato con chiarezza fin dagli anni ’70, vi è un’accettazione, per lo più implicita, di regole, norme o clausole di un contratto dialetticamente intrecciato alla situazione didattica, all’insieme assai complesso, variegato e delicato di interazioni, comportamenti, richieste, atteggiamenti, funzionamenti cognitivi attesi relativi al sapere in gioco, da insegnare o insegnato, che caratterizzano la situazione didattica; una situazione nella quale, per lo studente, fornire la risposta attesa dall’insegnante o mostrare di sapere quello che, dal suo punto di vista, l’insegnante vuole sapere, diventa una priorità assoluta.

Il concetto di “contratto didattico” è stato introdotto nel 1978 da Guy Brousseau proprio per caratterizzare l’insieme dei comportamenti dell’insegnante attesi dallo studente e l’insieme dei comportamenti dello studente attesi dall’insegnante, in relazione al sapere matematico in gioco, che possono costituire una possibile causa del *fallimento elettivo* in matematica, ovvero delle difficoltà di apprendimento della matematica da parte degli studenti che mostrano di possedere, nonostante le difficoltà incontrate in matematica, adeguate conoscenze in altre discipline. In altre parole, gli studenti più in difficoltà in matematica si comportano “*come se loro* avessero accettato un contratto secondo il quale essi devono fare solo ciò che essi ritengono che ci si attende da loro” (p. 66).

Il contratto didattico, così concepito, ha una forza esplicativa e una potenza predittiva molto elevate, a tal punto che, opportunamente interpretato e adattato, può essere applicato a situazioni diverse da quelle matematiche specifiche che lo hanno fatto emergere.

Come affermano gli Autori, non si tratta di un contratto “vero”, con clausole dichiarate, accettate o concordate in modo esplicito tra le parti, ma tutto si svolge come se un tale contratto fosse stato preventivamente stipulato. Il contratto didattico, per il suo enorme potere esplicativo e predittivo, si configura dunque come “un quadro d’analisi di ciò che succede nella relazione di insegnamento” (p. 68), un quadro d’analisi ampio e articolato, ma strettamente legato alle caratteristiche del sapere in gioco.

I diversi effetti del contratto didattico sono qui descritti in modo dettagliato e preciso, accompagnati da esempi persuasivi, chiari ed efficaci, di evidente importanza per l’analisi, l’interpretazione e la gestione di una qualsiasi situazione didattica concreta. Tra gli esempi più interessanti e significativi, vi sono quelli legati:

- alla concezione della scuola come direttiva ed esclusivamente valutativa (che rinviano più a un contratto "sociale" che a un contratto "didattico");
- alla concezione della matematica come disciplina nella quale "si *devono* sempre fare dei calcoli" (p. 14);
- a ripetizioni di comportamenti o modalità di tipo "sociale" (inerenti, per esempio, alle interrogazioni, alle caratteristiche o tipologie attese di domande poste o di problemi proposti);

insieme a tanti altri esempi, tutti descritti, contestualizzati e analizzati in profondità alla luce di diverse clausole del contratto didattico (clausola di fiducia nell'insegnante o di immagine della matematica, clausola di *delega formale*, clausola di *esigenza della giustificazione formale*, clausole relative a problemi "di realtà", clausole "meta" al contratto didattico, o di altro tipo) e dei principali loro effetti (*età del capitano*, *Topaze*, *Jourdain* e *Dienes*, in particolare).

Una conoscenza approfondita, basata su risultati di ricerca, degli effetti del contratto didattico è assolutamente necessaria nella gestione e nella valutazione dei processi di insegnamento-apprendimento, da parte non solo degli insegnanti di matematica, dei formatori e ricercatori in didattica della matematica, ma anche di tutti coloro che sono o si sentono coinvolti nel settore educativo. Una tale conoscenza fornisce numerosi stimoli e spunti di riflessione sui modi in cui l'insegnante può creare le condizioni affinché l'allievo si allontani deliberatamente da norme contrattuali che ostacolano, limitano o impediscono risposte personali e cognitivamente produttive:

> si tratterà, per l'insegnante, di creare le condizioni sociali, affettive e didattiche della rottura del contratto didattico al fine di incitare l'allievo a basarsi solo su sé stesso per costruire, con o senza gli altri, i suoi propri significati. Perché *infine* occorrerà bene che, un giorno, egli prosegua da solo. (p. 98)

Si tratta di una sfida decisiva per l'insegnante e cruciale per l'apprendimento. Ma con quali strategie affrontare tale sfida?

Una risposta a questa e altre domande, che tormentano e affascinano allo stesso tempo ogni insegnante, si può trovare in questo libro, riccamente documentato e argomentato, con numerosi esempi che rinviano non solo alle origini del concetto di contratto didattico, ma anche alla sua evoluzione, ai suoi aspetti teorici ed epistemologici, ai suoi illuminanti quanto pericolosi paradossi, oltre che ai diversi modi (dei quali alcuni fuorvianti o errati) di concepirlo o interpretarlo. Di tutto ciò non svelo altro, proprio per evitare uno dei paradossi più complessi e intriganti del contratto didattico, paradosso che lascio al lettore il piacere di scoprire.

Aggiungo solo che si tratta di una revisione critica di un libro pubblicato per la prima volta nel 2010, con titolo diverso, poi tolto dal catalogo nel 2016, tradotto in spagnolo e pubblicato nel 2018; una raccolta ricca e preziosa di articoli sul contratto didattico, la cui rilevanza, profondità e attualità sono riconosciute con soddisfazione e gratitudine anche da colui che ha genialmente concepito tutto ciò, sì, dallo stesso Guy Brousseau (medaglia Felix Klein 2003), universalmente riconosciuto come il padre della Didattica della Matematica, autore della prefazione e della postfazione.

Bolondi, G., & D'Amore, B, (2020). *La matematica non serve a nulla*. Bologna: Pitagora.

Recensione di Alessandro Gambini

Come si formano i pregiudizi sulla matematica?

Nell'immaginario comune, la matematica, si sa, risente di una serie di pregiudizi ormai radicati, tra i quali spicca la convinzione diffusa e semplicistica che riduce la matematica al "saper fare i conti" e che, detta altrimenti, identifica una disciplina ampia e variegata con un suo aspetto marginale. L'importanza della scuola ai fini del progresso personale e sociale è ormai largamente condivisa, ma non si può dire altrettanto del ruolo che in questo senso è riconosciuto alla matematica, spesso considerata una disciplina estremamente complessa e inaccessibile a tanti (basti pensare a quanti adulti, alcuni dei quali ricoprono cariche istituzionali, si vantano con orgoglio di non sapere o di non capire questa disciplina). L'idea della matematica viene solitamente diffusa attraverso una serie di altri canali, alcuni legati alla scuola (musei, libri), altri fuorvianti, spesso diffusi dai media, che contribuiscono a creare una certa idea pubblica della matematica. Per esempio, al cinema i matematici sono diventati popolari negli ultimi decenni, ma l'immagine generalmente veicolata risulta stereotipata, perché caratterizzata da una genialità innata che spesso sfocia nella follia, valicando una linea di demarcazione decisamente sottile.

Nella visione comune, il matematico viene visto come *nerd,* una persona isolata dal mondo che si disinteressa delle necessità materiali. Nonostante si reputi una disciplina noiosa e ripetitiva, in cui tutto è deciso e in cui tutto è già stato scoperto, la matematica è una scienza in perenne evoluzione soprattutto grazie alle innovative scoperte realizzate da tanti matematici contemporanei.

A onore del vero, va detto che i matematici solitamente non si interessano della loro immagine pubblica o della fama di cui gode la disciplina che studiano e rappresentano. Il diffondersi di atteggiamenti negativi e poco propositivi verso la materia sta però avendo ripercussioni importanti, sia a livello scolastico che accademico; basti pensare che la matematica è la materia che genera più ostilità a tutti i livelli scolastici e vanta il più grande numero di fallimenti effettivi. A livello universitario, oltre a rappresentare il principale elemento demotivante per le iscrizioni ai corsi di profilo scientifico, è la principale disciplina che registra performance accademiche ritenute insufficienti. Dal punto di vista culturale, il ruolo ricoperto dalla matematica sta diventando una questione sempre più rilevante.

Nonostante sia alla base di tutto ciò che fa parte della nostra quotidianità e il mestiere del matematico pervada oggi tutti i settori, il pregiudizio più diffuso è che la matematica non serva a nulla. Ed è proprio un graffito con questa scritta, fotografato in piazza del Baraccano a Bologna nella primavera 2006, a pochi passi da una scuola media, che ha spinto Giorgio Bolondi e Bruno D'Amore, due matematici interessati anche agli aspetti storici, culturali, epistemologici e pedagogici della materia, a confutare quella frase che dà anche il titolo al libro stesso.

Alternando citazioni e discussioni, a volte provocatorie, ricorrendo a temi e personaggi con punti di vista differenti, gli autori cercano di sfatare i tanti e diffusi pregiudizi sulla matematica, sul suo insegnamento e sul suo apprendimento.

La maggior parte delle citazioni riportate non appartengono a matematici di mestiere; la scelta provocatoria, e più che mai appropriata, è quella di dare spazio ai non matematici. Il racconto è un susseguirsi di commenti e riflessioni a citazioni di personaggi di vario genere, in cui non mancano spunti pedagogici e didattici. Si passa da parole e scene di personaggi come Pinocchio, Peppone e don Camillo (Guareschi fa un sacco di citazioni matematiche di cui non è facile accorgersi), a frasi di poeti e scrittori come Dante Alighieri (nella *Divina Commedia* compaiono impliciti riferimenti all'aritmetica e alla geometria che Alighieri non spiega al lettore dando per scontato che il lettore li comprenda).

Alcuni personaggi citati sono matematici di grande rilievo di cui viene anche riportata una breve biografia; vengono commentati pensieri di matematici dell'antica Grecia come Euclide e Aristotele, fino ad arrivare alle riflessioni teoriche di alcuni dei matematici più famosi del secolo scorso come Hardy, Weil, Dedekind, Groethendieck, passando per Galilei, Eulero, Lagrange, solo per citarne alcuni.

Tutte le citazioni e i relativi approfondimenti diventano pretesti per rispondere a quesiti fondanti della matematica e del suo insegnamento. Perché la matematica è così complicata? Perché il suo linguaggio è così formale tanto da renderla diversa dalle altre scienze? Perché è difficile apprendere la matematica? Cosa c'è da scoprire ancora in matematica?

Queste e tante altre domande guidano il lettore nell'esplorazione di una disciplina che non gode di tanta popolarità, nell'intento di liberare il campo da quei pregiudizi che hanno indotto il presunto studente graffitaro a scrivere che "la matematica non serve a nulla".

Arrigo, G., D’Amore, B., & Sbaragli, S. (2020). *L’infinito matematico: Storia, epistemologia e didattica di un tema affascinante*. Bologna: Pitagora.

Recensione di Miglena Asenova

Alzi la mano chi, da studente, leggendo per la prima volta la definizione “epsilon-delta” di limite, non ha avvertito un certo disagio. E chi, da insegnante, non ha pensato e ripensato mille volte a “come spiegare i limiti”. Perché sì, “per entrare in aula e parlare del concetto di limite ci vuole un certo coraggio”, come disse la mia tutor di tirocinio alla SISS, nel momento in cui entrai in classe per la prima volta da docente.

Nella suddetta definizione l’infinito non compare in maniera esplicita, ma è lì presente, nella sua forma più rigorosa e difficile da concepire: come infinito attuale. L’insegnante lo sa e spesso lo dà per scontato; lo studente, nella maggior parte dei casi, non lo sospetta nemmeno.

E poi, all’università, quando questo malcapitato studente, il più delle volte completamente ignaro della grave colpa di cui si sta per macchiare, pronuncia il fatidico “si avvicina sempre di più” e, alzando lo sguardo incrocia lo sguardo gelido del professore, capendo in quell’istante che è troppo tardi, che quanto appena detto gli costerà probabilmente l’approvazione nell’esame di Analisi I, accanto all’accettazione del proprio destino, dovrà accogliere anche il dubbio feroce di non aver capito bene che cosa sia successo davvero. E come dargli torto: in fin dei conti, lui (o lei) non ha imparato a memoria la definizione, *l’ha voluta capire*, e *ha voluto spiegare* per come l’ha capita …, Che cosa c’è di sbagliato nel farlo? C’è chi li chiama “asintotici”, c’è chi li chiama “dinamici”; sono quegli studenti che usano con disinvoltura l’infinito potenziale nel tempio eretto a quello attuale: la matematica espressa tramite il moderno linguaggio formale della teoria degli insiemi. Parlare di infinito potenziale lì è quasi come bestemmiare in un luogo sacro.

E allora la mente corre alle pagine scritte da Gianfranco Arrigo, Bruno D’Amore e Silvia Sbaragli, a quella lunga, lunghissima storia che ha visto l’infinito attuale bandito dalla matematica, in cui era ammesso solo quello potenziale, sulla scia del “divieto” aristotelico, a cui nei secoli si attennero, con giusto qualche voce che tentava di cantare fuori dal coro, il fior fiore dei matematici da Euclide a Lagrange.

Infatti, se ci si chiede come l’umanità, o quella esigua parte di essa che si è dedicata nei secoli al culto della matematica, sia arrivata a concepire una definizione come quella oggi ampiamente accettata come una definizione assolutamente rigorosa di limite, ci si rende conto che si tratta di una storia lunga assai, durata quasi 2500 anni, in cui la definizione in questione è solo una delle ultime tappe. Ma sono cose che sfuggono, se non si conosce bene la storia della matematica, e quella dell’infinito in particolare.

Se poi come docente vieni a sapere che perfino Gauss, sì, il *princeps mathematicorum*, si schierò nel 1800 contro "l'uso di una grandezza infinita come un tutto compiuto", ricorrendo a frasi come "si avvicina indefinitamente", allora forse la prossima volta che sentirai pronunciare parole simili da parte di un tuo studente, forse anche tu penserai che in fin dei conti, un po' di storia della matematica in aula non guasta. Perché sì, in fondo è anche una questione di cultura generale …

Ma poi … storia non è uguale a storia. Infatti, di solito si fa risalire il calcolo infinitesimale a Newton e Leibniz ma, come fanno notare gli autori di questo libro: "è indubbio che (…) Leibniz e Newton (…) non avrebbero nemmeno potuto concepire i risultati delle loro ricerche se non vi fossero stati i lavori matematici e le riflessioni filosofiche che abbiamo cercato di descrivere fin qui" (p. 57). Essi citano a tale proposito lo storico Pascal Dupont:

> Leibniz è considerato spesso, con Newton, fondatore o inventore dell'analisi infinitesimale. Ribadiamo un concetto più volte espresso: i contributi di Newton e Leibniz all'affermarsi (o, se proprio vuoi, alla nascita) dell'analisi infinitesimale sono fondamentalissimi, ma, ciononostante, noi non riteniamo che abbia senso chiamare i nostri due sommi scienziati "inventori dell'analisi infinitesimale". Quella scienza, che poi per molto tempo venne chiamata "Calcolo Sublime", nacque nel XVII secolo attraverso un processo intricatissimo. (Dupont, 1981, p. 632)

Ed è proprio questo "processo intricatissimo" che non bisogna perdere di vista per riuscire a capire bene la matematica di oggi, nella quale l'infinito occupa un posto di rilievo. Vale dunque la pena, anche solo per cultura personale, seguire questa straordinaria e affascinante avventura umana.

Ma questo libro non narra solo la *storia* o l'*epistemologia* dell'infinito matematico; è anche una ricca raccolta di ricerche sull'infinito nell'ambito della Didattica della matematica, legata in particolare alle convinzioni degli insegnanti e degli studenti su questo argomento affascinante e dibattuto a ogni livello scolastico e sul quale, come il lettore potrà constatare, non solo gli studenti "grandi", ma anche i bambini della scuola dell'infanzia hanno parecchio da dire.

Eppure, è solo dopo aver riflettuto sull'evoluzione epistemologica del concetto di infinito, narrata nella prima parte del libro, che ci si rende conto di come le concezioni di insegnanti e studenti rispecchino quelle dei matematici nel tempo. Ma ci si rende conto anche che le misconcezioni degli insegnanti diventano misconcezioni degli studenti perché non si può insegnare correttamente ciò che non si conosce o che non si conosce correttamente. E allora ci si rende conto anche che non è una questione di livello scolastico, cioè che ogni livello scolastico ha le proprie, di misconcezioni tipiche, anche se alcune, quelle basate sui concetti più intuitivi, persistono e sopravvivono fino all'università. E allora si capisce che no, che non è solo una questione di cultura matematica generale, ma che c’è molto di più, nello studiare l’infinito dal punto di vista epistemologico e didattico: c’è una questione legata alla deontologia professionale.

Il libro chiude con una utilissima raccolta di brevi presentazioni delle diverse scuole filosofiche citate nel testo (ne abbiamo contate più di trenta), che hanno alimentato e guidato l’evoluzione del concetto di infinito matematico, a partire dall’*ápeiron* di Anassimandro di Mileto (ca. $^{-}$610-$^{-}$547), in cui infinito, illimitato e indefinito si intrecciavano indistintamente, fino allo straordinario lavoro conclusivo di Cantor, su cui si basa l’odierno concetto di infinito matematico, ancorato alla teoria degli insiemi. Dunque, anche in questo caso valgono, come per tutto il libro, le raccomandazioni seguenti: chi sa di non sapere, si affretti; chi sa di sapere, se ne sinceri.

Se poi, letto il libro, la mente dovesse tornare ancora al modo in cui lo studente usa l’infinito potenziale e attuale, forse lo si farà con maggiore consapevolezza del fatto che i divieti e i dogmi vanno e vengono, ma che ciò che resta è l’evoluzione della conoscenza matematica che, nel caso specifico, si dipana sempre tra le due sponde dell’infinito: quello attuale e quello potenziale, ancora di più se si tratta dell’infinito nell’aula di matematica.

Riferimenti bibliografici

Dupont, P. (1981). *Appunti di storia dell’analisi infinitesimale*. Torino: Cortina.

D’Amore, B., & Sbaragli, S. (2017). *La matematica e la sua storia*. Vol. I: *Dalle origini al miracolo greco*. (Prefazione di Umberto Bottazzini). Bari: Dedalo.

D’Amore, B., & Sbaragli, S. (2018). *La matematica e la sua storia*. Vol. II: *Dal tramonto greco al Medioevo*. (Prefazione di Paolo Freguglia). Bari: Dedalo.

D’Amore, B., & Sbaragli, S. (2019). *La matematica e la sua storia*. Vol. III: *Dal Rinascimento al XVIII secolo*. (Prefazione di Luigi Pepe). Bari: Dedalo.

D’Amore, B., & Sbaragli, S. (2020). *La matematica e la sua storia*. Vol. IV: *Dal XVIII al XXI secolo*. (Prefazione di Gabriele Lolli). Bari: Dedalo.

Recensione (della quadrilogia) di Massimo Ferri

Fate caso al titolo: non è “Storia della matematica”; la protagonista è la matematica, e la storia è intesa come un aiuto a comprenderla meglio e soprattutto a insegnarla. Gli Autori dichiarano fin dalle prime righe di essere interessati alla didattica (il loro campo di ricerca scientifica) e alla divulgazione e di non essere storici di professione. Il loro obiettivo è ben compreso e apprezzato nelle prefazioni di quattro esperti di lusso: Umberto Bottazzini, Paolo Freguglia, Luigi Pepe e Gabriele Lolli. Ma si può comunque perseguire questo scopo in circa 1500 pagine con la pretesa di coprire le origini, il "miracolo" greco e il suo tramonto, il medioevo, il rinascimento, l'illuminismo, fino agli ultimi due secoli, che da soli starebbero stretti in quattro volumi? No, e questo è chiaro ai due Autori; perciò impostano in modo più o meno esplicito dei fili conduttori: l'interazione con l'arte, l'influsso degli eventi storici, le storie personali (ma senza cadere nell'aneddotica) e uno, secondo me quello principale, che per il momento non svelo.

Segnalo i continui riferimenti al lavoro di storici professionisti, la ricchissima bibliografia e le utili liste di nomi con date di nascita e morte. Trovo azzeccate le digressioni piazzate in paragrafi, appendici o interi capitoli; le mie preferite sono: curve non costruibili con riga e compasso, la storia dello zero, le macchine da calcolo.

Del primo volume apprezzo molto il rispetto manifestato per le origini: il pensiero greco, "uno dei misteri più inspiegabili e grandiosi della storia dell'umanità", compare solo a pag. 121. Il libro mette in luce il legame strettissimo della comprensione della natura con lo studio autoreferenziale del pensiero, con i misteri dell'infinito e infine con il metodo ipotetico-deduttivo. Si passa da Talete alla scuola pitagorica e alla scuola eleatica intercalando punti prettamente matematici con aspetti filosoficamente sconvolgenti come l'incommensurabilità e i paradossi. Numerose e ben commentate sono le citazioni di Platone e Aristotele. Con quest'ultimo naturalmente fa la sua comparsa la logica, che giocherà un ruolo rilevante nei volumi seguenti. Ovviamente grande spazio è concesso agli *Elementi* di Euclide. Gli Autori non nascondono, poi, la loro ammirazione per Archimede coi suoi metodi meccanici e con i suoi presagi di calcolo infinitesimale.

Ero molto curioso di leggere il secondo volume, non conoscendo niente della matematica medievale. Il raccordo con il volume precedente è offerto da Apollonio, Tolomeo, Pappo e Diofanto; con quest'ultimo si studiano i problemi aritmetici con soluzioni intere e si affronta l'importantissimo progetto di una notazione simbolica, un altro "basso continuo" di tutta l'opera. Dopo una rapida disamina della matematica etrusca e latina ci si avvicina al medioevo ma c'è uno stacco importante e dovuto: la matematica in India, in Cina, nelle Americhe. Dalla matematica del mondo arabo si torna con naturalezza nel nostro ambito culturale. Gli eventi matematici sono inquadrati nei grandi mutamenti della società; s'intrecciano matematica, logica e filosofia. Ci aspettavamo Fibonacci, ma troviamo anche Tommaso, Bacone, Lullo, Ockham e tanti altri. Troviamo la complessa interazione con la Chiesa e la nascita delle università; troviamo Dante. L'impatto della notazione posizionale è comunque la parte che mi ha affascinato di più.

Naturalmente il volume che copre il periodo dal rinascimento al XVIII secolo è pirotecnico: idee e personaggi si alternano senza un attimo di respiro. Cominciamo con il fermento attorno alle equazioni di terzo grado, che vede protagonisti (ma non unici attori) Tartaglia e Cardano, poi Ferrari, con cui si risolverà il problema del quarto grado; e già ci lanciamo verso uno dei punti cardine del prossimo volume. Necessariamente sono nati i numeri complessi; spuntano i logaritmi. Nasce la prospettiva, con cui gli artisti/matematici rinascimentali superano di netto i loro modelli dell'antichità. Leonardo disegna le illustrazioni del "De divina proportione" di Pacioli e gravita attorno alla matematica con alterne fortune. Da teoremi e formule enunciati a parole si passa a un simbolismo sempre più accurato. Arriva la rivoluzione scientifica di Galileo; conosciamo la sua scuola e la sua modernissima vocazione divulgativa. Descartes (preceduto da un contributo di Fermat qui citato) crea la geometria analitica all'interno di un suo progetto generale di studio della realtà. Questa novità tecnica rivoluziona in effetti il modo stesso di concepire gli enti geometrici e si accompagna a uno sviluppo della notazione algebrica, argomenti a cui gli Autori prestano molta attenzione nel corso di tutta l'opera. L'intreccio tra filosofia e matematica compare naturalmente anche in Pascal. Il genio poliedrico di questi personaggi sembra non conoscere confini e abbraccia geometria, fisica, probabilità, logica e, in particolare con Fermat, riprende ed estende lo studio dei numeri naturali e dà l'avvio all'analisi infinitesimale. Si arriva a Leonhard Euler, uno dei miei idoli, e qua ogni lista riassuntiva del suo lavoro sarebbe gravemente riduttiva. Parlavamo dell'analisi? Ecco Newton e Leibniz e la controversa paternità di uno degli strumenti più innovativi e potenti dell'umanità. Di nuovo ecco l'interazione con la filosofia, di nuovo un progresso nella notazione matematica.

Ero dubbioso, aprendo il quarto volume. D'Amore e Sbaragli hanno saputo gestire l'effervescenza del rinascimento, ma come potranno presentarci le esplosioni nucleari degli ultimi due secoli in poco più di trecento pagine? Come giustificheranno le inevitabili scelte e inevitabili rinunce? La loro soluzione è furba ed elegante: si affidano a quello che secondo me è il loro principale filo conduttore. Cosa interessa di più a due studiosi di didattica della matematica? (Intendo la *vera* didattica, non quella da "fast food" per maestri frettolosi). Secondo me il primo interesse è la comprensione profonda degli strumenti matematici, più che il loro uso. In effetti, rileggendo le introduzioni e molti passi dei volumi, questo appare come un progetto esplicito degli Autori.

Cos'è l'infinito? Cos'è il numero? Cos'è una struttura matematica? Cos'è una dimostrazione? Questi temi, presenti fin dall'inizio dell'opera, diventano la struttura portante del quarto volume. Si comincia con lo sconcertante teorema di Ruffini-Abel-Galois: la non esistenza di una formula per le equazioni di quinto grado e oltre, che si affianchi a quelle dei gradi precedenti. Si concretizza la necessità dello studio delle strutture algebriche in quanto tali:

che cosa materialmente sia rappresentato dai numeri in gioco passa in secondo piano. Un altro problema rimasto in sospeso è quello relativo al postulato delle parallele; il passaggio da Saccheri a Gauss, Lobačevskij, Bolyai e Riemann è in gran parte un passaggio concettuale: si passa da "che cosa è vero in geometria" a "che cosa è indipendente dal punto di vista logico".

E i problemi risolubili con riga e compasso? Ecco che le nuove tecniche algebriche permettono di capire che cosa è possibile e che cosa no in termini di numeri algebrici e trascendenti. Lo sviluppo travolgente dell'analisi richiede un approfondimento del concetto di infinito e inevitabilmente del concetto stesso di numero, su cui si cimentano Bolzano, Weierstrass, Cauchy, Dedekind, Méray, Peano fino alle incredibili analisi di Cantor. La teoria degli insiemi nasce e subito va in crisi con la lettera di Russell a Frege. Nel frattempo nasce e prospera la topologia, dove emergono nomi noti come Möbius e Poincaré. La logica trabocca dal dominio della filosofia e diventa logica matematica. Intanto la scienza è costretta a farsi filosofia e a interrogarsi sulla sua stessa natura. Hilbert si chiede se verità e dimostrabilità coincidono; risponde Gödel, con risultati indiscutibili e sconvolgenti. L'intuizionismo rifiuta procedimenti dimostrativi consolidati. Si dimostra che l'assioma di scelta è indipendente, seguendo lo stesso schema delle geometrie non euclidee. Lo studio delle strutture si spinge fino alla teoria delle categorie.

Insomma, la lente privilegiata con cui gli Autori osservano il XIX e il XX secolo è un grandangolo che abbraccia e spiega molto del travolgente progresso ancora in corso. Non vengono trascurati gli ambiti culturali in cui questo processo matura: la scuola di Göttingen, il circolo di Vienna, Bourbaki. In un capitolo finale si riassumono rapidamente molti temi più lontani dalla critica dei fondamenti, cara agli Autori.

Affascinante, però mi sarebbe piaciuto, anzi mi piacerebbe sentire dalla loro voce, la storia delle equazioni differenziali, del rapporto fra dominio e frontiera, delle trasformate, dell'impatto sull'elettromagnetismo; il groviglio dei problemi NP-completi, pronto a collassare su di noi o forse no; il giallo, pieno di colpi di scena e non completamente risolto, della classificazione topologica delle varietà; e tante, tante altre storie di idee e di persone dal 1800 a oggi. Insomma, da emiliano-romagnolo a due conterranei dico: grazie per questo antipasto, è proprio di quelli nostri, monumentale e saporito. Una pausa ci sta, ma poi mi aspetto primo, secondo e dolce.

Bohórquez Arenas, L. A. (2020). *Concepciones sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje y sus cambios en estudiantes para profesor en ambientes de aprendizaje fundamentados en la resolución de problemas*. (Prologo de Bruno D'Amore). Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
http://die.udistrital.edu.co/publicaciones/concepciones_sobre_gestion_proceso_ensenanza_aprendizaje_cambios_estudiantes_para_profesor_ambientes_aprendizaje_fundamentados_resolucion_problemas

Prefazione (in lingua italiana) di Bruno D'Amore

La formazione degli insegnanti di Matematica è sempre stato un problema teorico e istituzionale, dibattuto sia a livello accademico, sia ministeriale. Le persone riconosciute per vari motivi come esperti venivano chiamati dai responsabili istituzionali (per esempio politici) di questi temi a dare pareri. Si è cominciato banalmente con il pretendere una formazione professionale idonea dal punto di vista matematico, poi si è diffusa l'idea di far seguire a questa dei corsi di Pedagogia e/o Psicologia. Fino a quando è nata, negli anni '80, la disciplina accademica Didattica della Matematica. A questo punto, gli esperti sono diventati gli studiosi di didattica (confondendo talvolta la Didattica della Matematica con la Didattica generale). Spesso, in vari Paesi del mondo, questi esperti hanno proposto l'idea che la formazione dovesse, sì, avvenire dopo l'acquisizione di un titolo idoneo di studio ma che a questo dovesse seguire una formazione specifica almeno biennale in Didattica della Matematica (includendo laboratori sperimentali in aule reali, seguiti da docenti di scuola selezionati in base all'esperienza e conoscitori della Didattica della Matematica). Va ricordato esplicitamente che la Didattica della Matematica già ha incluso in sé stessa quegli elementi di base di Pedagogia, Psicologia, Semiotica, Filosofia eccetera necessari a chi deve, come professionista, insegnare Matematica. Alcuni Paesi hanno seguito questa linea, come Francia e Italia; altri hanno preferito modificare la formazione stessa degli insegnanti, fin dagli esordi di base, cambiando la struttura dei corsi universitari, passando da una laurea in Matematica che forma matematici alle "licenze in Matematica", 10 semestri di studio che includono sì la formazione matematica ma anche la continua riflessione sugli aspetti didattici di questa, come il Messico e la Colombia.

Ma la base di tutto ciò, in entrambi i versanti, è stata sempre l'esperienza, il buon senso, i risultati di alcune ricerche: gli esperti, cioè i didatti della Matematica, sulla base della loro buona fede e del buon senso, hanno creato questi percorsi (gli uni o gli altri), ma senza avere una solida base di ricerca specifica sul settore della formazione degli insegnanti.

Da qualche anno, invece, la voce "Formazione degli insegnanti di Matematica" è diventata un vero e proprio tema di ricerca specifica, tanto da costituire spesso una delle basi epistemologiche di ricerca scientifica nella formazione dottorale. Questa linea è quella che ha spinto il dottor Ángel Bohórquez a scegliere il proprio tema di ricerca, che lo ha portato a vari anni di studio e di ricerca, e poi a conseguire il titolo di dottorato, presentare una tesi specifica e infine a scrivere questo libro che offre un'interessante testimonianza sulla sua attività di ricerca, fortemente intrecciata con l'esperienza di docente universitario in una "licenciatura".

Come in ogni vera attività di ricerca, preliminare a ogni presentazione è capire bene l'ambito nel quale essa si è svolta.

Ángel è professore titolare di un corso nell'ambito della "Licenciatura en Matemática". L'ambito nel quale insegna si chiama "Risoluzione dei problemi", dunque i suoi studenti sono tutti inseriti in questo contesto. Lui agisce, dunque, proponendo problemi (problemi veri, non esercizi) abbastanza complessi, in modo che si mettano in atto strategie risolutive ma, soprattutto, che il gruppo dei suoi allievi discuta proprio di questo, delle strategie risolutive proposte, analizzate, accettate, infine messe in atto. Si suppone che un futuro docente di Matematica sappia dominare e valutare le proposte che un giorno emergeranno dal lavoro dei suoi studenti in aula, con professionalità e non solo per intuizione, che abbia cioè raggiunto una vera competenza piena. Che cosa di meglio si può proporre, se non cominciare a esaminare le proprie proposte personali in modo critico?

Ma Ángel non si limita a questo; seguace della scuola di Alicante, creata dal collega e amico Salvador Llinares (che Ángel ha visitato durante la sua permanenza di studio e ricerca all'estero, partecipando ai lavori di ricerca del gruppo alicantino e sottoponendo ad analisi continua i risultati sperimentali e teorici della sua stessa ricerca), propone esplicitamente ai suoi studenti una meta-analisi, quella del ruolo del docente in aula e soprattutto della sua gestione dell'aula quando l'oggetto di studio è la Matematica anzi, in modo più specifico, la risoluzione di problemi di Matematica. Non si parla qui di gestione dal punto di vista burocratico o formale, ovviamente, ma di gestione come attività professionale, considerando il docente come un professionista che attua in una minisocietà che, in qualche modo, non solo istituzionalmente ma anche umanamente, dipende da lui, dalla sua gestione, dalla sua sensibilità, dalla sua cultura.

La gestione dell'aula è un tema non del tutto nuovo, dato che proprio la scuola di Alicante ha proposto tematiche di analisi e ricerca in questa direzione ben note nel contesto internazionale della ricerca in Didattica della Matematica (da qui la scelta ovvia del luogo della permanenza di studio all'estero).

Ma non è finita qui; Ángel ha voluto indagare se e come gli studenti, futuri docenti di Matematica, grazie alla propria esperienza personale autoriflessiva, siano in grado di descrivere, in via preliminare, quel che intendono in fase iniziale con il termine "gestione della classe nelle ore di Matematica" e se, grazie all'attività didattica che vivono, come studenti, lungo il corso seguito, siano in grado di riflettere, anzi di meta-riflettere, e cambino eventualmente opinione sul tema della gestione, fino a rendersene conto. In modo tale che, alla fine del percorso semestrale, riconoscano (o no) di aver cambiato opinione sull'idea di gestione. Ángel sfrutta a questo proposito ricerche già effettuate su temi simili, la formidabile idea di competenza proposta negli anni da Llinares, le metodologie di analisi tipiche della scuola di Alicante. E, per la metodologia di ricerca, si serve di quella di D'Amore e Fandiño della coppia di lettere "prima-dopo" scritte dai singoli studenti, prima e dopo la durata del seminario semestrale, strumento che costringe lo studente (futuro docente) a riflettere sui suoi propri cambi.

Il risultato raggiunto e descritto in questo libro è eccellente e non potrà che costituire un tassello importante di base, d'ora in poi, nel campo della costruzione di strategie (accademiche e istituzionali) per la formazione dei futuri insegnanti di Matematica.

Gli studenti accettano l'evidenza: seguendo la strada scelta dal loro docente Ángel, essi riescono a compiere analisi introspettive sulle modifiche avvenute in sé stessi, per esempio una definizione personale di gestione della classe quando il tema è l'apprendimento attraverso la risoluzione di problemi di Matematica, e sui cambi a volte molto notevoli fra quelle che erano *prima* e sono *ora* le loro convinzioni personali.

Arrivare a trasformare quello che sembra un percorso puramente sperimentale in una vera e propria ricerca scientifica anche teorica ha costretto Ángel a una difficile successione di scelte, definizioni, analisi, prese di posizione personali, per esempio quelle relative all'idea ancora così dibattuta e confusa di competenza e la coppia credenze/convinzioni che, fino a poco tempo fa, veniva affrontata in modo superficiale dai ricercatori e che invece costituisce in questa ricerca una chiave di volta di estremo interesse.

Auspico che questo libro possa finire fra le mani di coloro che istituzionalmente si occupano della formazione dei futuri insegnanti (di Matematica, ma non solo) affinché le scelte anche amministrative possano essere prese in funzione dei sorprendenti e profondi risultati di ricerca raggiunti in questo lavoro.